Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Abril - Julio 2007

Nombre: ______________________________

Carnet: ________________ Sección: _____

MA-1123 DE HONOR—Primer parcial—

Cada ejercicio vale 10 puntos. Justifique sus afirmaciones.
Debe resolver cuatro, cualesquiera de los seis ejercicios.

1. Sean S y $T,$ subespacios del espacio vectorial $E.$ Suponga que $S \cap T = \{0\}.$ Demuestre que si $x_1, \ldots, x_k$ son vectores linealmente independientes en S y si $y_1, \ldots, y_\ell$ son vectores linealmente independientes en $T,$ entonces $x_1, \ldots, x_k,\ y_1, \ldots, y_\ell$ son vectores linealmente independientes.

2. Sean $P_1 = (a_1, b_1, c_1),\ P_2 = (a_2, b_2, c_2), \ldots P_4 = (a_4, b_4, c_4),$ puntos en $\mathbb{R}^4.$ Demuestre que los cuatro están en un mismo plano afin si y solo si, el determinante
$$det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 1 & a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix}$$
se anula.
Sugerencia: Considere los vectores
$$\begin{aligned} v_1 &= \overrightarrow{P_1P_4} \\ v_2 &= \overrightarrow{P_2P_4} \\ v_2 &= \overrightarrow{P_3P_4} \end{aligned}$$

3. Sea $p : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ una proyección $(p^2 = p).$ Supongamos que $dim\ (ker\ p) = 2$. Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ una función lineal tal que $pf = fp.$ Demuestre que hay una base $x_1,\ x_2,\ x_3,$ x_4 de $\mathbb{R}^4$ donde la matriz A de f es de la forma
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$
Sugerencia: Pruebe con bases de $ker\ p$ y de $Im\ p.$

4. Sea A
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
¿Es A diagonalizable?
Sugerencia: Verifique si $A^2 = A.$

5. Sea $K_n[x]$ el conjunto de los polinomios en x de grado menor que n y el polinomio nulo $(n = 2, 3, \dots)$

   a) Demuestre que para cada $\alpha \in K,$ los polinomios $1, x-\alpha, (x-\alpha)^2, \dots, (x-\alpha)^{n-1}$ forman una base de $K_n[x]$

   b) Dado $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1},$ encontrar las coordenadas de p en la base anterior

6. El siguiente sistema está determinado o no, según los valores de a y b :

$$\begin{cases} ax_1 & + & bx_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ ax_1 & + & (2b-1)x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ ax_1 & + & bx_2 & + & (b+3)x_3 & = & -1 \end{cases}$$

   Analice los los posibles casos